૧૭. શ્રેણી અને શ્રેઢી

શ્રેણી : જે વિધેયનો પ્રદેશ N હોય તેને શ્રેણી કહે છે. જો X કોઇ આપેલો અરિક્તગણ હોય તથા જો $F : N \to X$, તો F ને X ની એક શ્રેણી કહે છે.

દા. ત. :

(1) 1, 4, 9, 16, 25, ..., Tn

(2) 1, 4, 7, 10, 13, 16, ..., Tn

આ શ્રેણીનું n મું પદ શોધવાના સૂત્રને 'શ્રેણીસૂત્ર' અથવા 'n માં પદનું સૂત્ર' કહે છે. તેને સંકેતમાં T_n, a_n, u_n, t_n વગેરે વડે પણ દર્શાવાય છે.

નોંધ : અહીં, એ જરૂરી નથી કે દરેક શ્રેણીનું શ્રેણીસૂત્ર મળે.

દા. ત. : અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની શ્રેણીને શ્રેણીસૂત્ર નથી.

શ્રેઢી :

ધારો કે $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ એ સંખ્યાઓની શ્રેણી છે. પ્રત્યેક $n \in N$ માટે આ શ્રેણીના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો લઈ આપણે એક નવી શ્રેણી બનાવી શકીએ. આ નવી શ્રેણી $S_1, S_2, S_3, ... S_n$ થાય. આ નવી શ્રેણીને મૂળ શ્રેણી સાથે સંબંધિત 'શ્રેઢી' કહેવાય છે તથા મૂળ શ્રેણીએ આ શ્રેઢીને અનુરૂપ શ્રેણી કહેવાય છે.

દા. ત. : મૂળ શ્રેણી 1, 3, 5, 7, 9, ... ને સંબંધિત શ્રેઢી 1, 4, 9, 16, 25, ... મળે.

- સામાન્ય રીતે શ્રેઢીના n માં પદને 'S_n' વડે દર્શાવાય છે.
- સંબંધિત શ્રેઢીના n માં પદ S_n માટે જો સૂત્ર મળે તો તે સૂત્રને 'શ્રેઢીસૂત્ર' કહેવાય છે.
- દરેક શ્રેણીને સંબંધિત શ્રેઢી તો હોય જ, પણ શ્રેઢીસૂત્ર સરળતાથી મળે અથવા ન પણ મળે.
- સમાંતર શ્રેણી
  જે શ્રેણીમાં બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો તફાવત એક સરખો જ હોય તથા તફાવત શૂન્ય ના હોય તો તેવી શ્રેણીને 'સમાંતર શ્રેણી' કહે છે તથા આ તફાવતને સમાંતર શ્રેણીનો 'સામાન્ય તફાવત' કહે છે.
- સમાંતર શ્રેણી માટે n માં પદનું સૂત્ર,

  $\boxed{t_n = a + (n - 1)\,d}$

  જ્યાં, $a =$ પ્રથમ પદ
  $n =$ પદનો ક્રમ
  $d =$ સામાન્ય તફાવત
  $t_n = n$ મું પદ
- સમાંતર શ્રેઢી :
  સમાંતર શ્રેણીને સંબંધિત શ્રેઢીને 'સમાંતર શ્રેઢી' કહેવાય. સમાંતર શ્રેઢીનું n મું પદ એટલે મૂળ સમાંતર શ્રેણીનાં પહેલા n પદોનો સરવાળો.
- કોઇ સમાંતર શ્રેણીનું પહેલું પદ a, સામાન્ય તફાવત d તથા n મું પદ l હોય તો, તેના પહેલાં n પદોના સરવાળા S_n માટેનું સૂત્ર,

$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]}$ અથવા $\boxed{S_n = \frac{n}{2}\,[a + l]}$

સમાંતર શ્રેણી તથા સમાંતર શ્રેઢી આધારિત ઉદાહરણ જોઈએ.

1. જો શ્રેણીસૂત્ર $T_n = 3n + 1$ હોય તો આ શ્રેણીના પ્રથમ પાંચ પદ મેળવો.

$T_n = 3n + 1$

$\therefore T_1 = 3(1) + 1 = 4$

$\therefore T_2 = 3(2) + 1 = 7$

$\therefore T_3 = 3(3) + 1 = 10$

$\therefore T_4 = 3(4) + 1 = 13$

$\therefore T_5 = 3(5) + 1 = 16$

આથી આપેલ શ્રેણીના પ્રથમ પાંચ પદ 4, 7, 10, 13, 16 થાય.

2. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... શ્રેણીનું 53 મું પદ જણાવો તથા 53 પદોનો સરવાળો જણાવો.

$T_{53} = 1 + (53 - 1)2$

$= 1 + 52 \times 2$

$= 1 + 104 = \boxed{105}$

તથા $S_{53} = \frac{53}{2}(1 + 105)$

$= \frac{53 \times 106}{2} = 53 \times 53$

$= 2809$

3. -17, -13, -9, ...નું 16 મું પદ જણાવો.

અહીં, $a = -17$

સામાન્ય તફાવત $d = -13 - (-17) = 4$

હવે, 16 મું પદ, $t_{16} = a + (n - 1)d$

$= -17 + (16 - 1)4$

$= -17 + 60$

$= \boxed{43}$

4. 101, 96, 91, ...નું 31 મું પદ જણાવો.

અહીં, $a = 101, d = -5$

$\therefore t_{31} = 101 + (31 - 1)(-5)$

$= 101 + 30(-5)$

$= 101 + (-150)$

$= -49$

5. $3, \frac{9}{2}, 6, \frac{15}{2}$, ...નું 10 મું પદ જણાવો.

અહીં, પ્રથમ પદ $a = 3$ તથા સામાન્ય તફાવત $d = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$

હવે 10 મું પદ $t_{10} = a + (n-1)d$

$$= 3 + (10-1)\ \frac{3}{2}$$

$$= 3 + 9 \times \frac{3}{2}$$

$$= \frac{6+27}{2}$$

$$= \boxed{\frac{33}{2}}$$

6. 100 થી 500 ની વચ્ચે 5 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી સંખ્યા કેટલી તથા આ દરેક સંસ્થાનો સરવાળો જણાવો.

અહીં શ્રેણી 105, 110, 115, 120, ... 495 તૈયાર થશે.

$\therefore\ t_n = a + (n - 1)d$ લેતા

$495 = 105 + (n - 1)\ 5$ થાય.

$\therefore\ 495 = 105 + 5n - 5$

$\therefore\ 395 = 5n$

$\therefore\ n = \frac{395}{5} = 79$

$\therefore\ \boxed{n = 79}$ સંખ્યા આવી મળે.

તથા $S_n = \frac{n}{2}\ (a + l)$

$= \frac{79}{2}\ (105 + 495)$

$= \frac{79 \times 600}{2}$

$= 79 \times 300$

$\boxed{Sn = 23700}$

7. $9 + 19 + 29 + 39 + ... + 199$ માં આવતી કુલ સંખ્યા કેટલી તથા તેનો સરવાળો જણાવો.

અહીં, $199 = 9 + (n-1)\ 10$

$\therefore\ 199 = 9 + 10\ n - 10$

$\therefore\ 10n = 200$

$\therefore\ \boxed{n = 20}$ સંખ્યાઓ હોય.

$Sn = \frac{20}{2}\ (9 + 199)$

$= 10 \times 208$

$\therefore\ \boxed{Sn = 2080}$

8. જો એક સમાંતર શ્રેણીનું 10 મું પદ $\frac{1}{20}$ અને 20 મું પદ $\frac{1}{10}$ હોય, તો તેનું 200 મું પદ શોધો.

અહીં, $t_{10} = \frac{1}{20}$ અને $t_{20} = \frac{1}{10}$

$\therefore\ \frac{1}{20} = a + (10 - 1)d = a + 9d$

$\therefore\ \frac{1}{20} = a + 9d \ \rightarrow\ 1$

અને $\frac{1}{10} = a + 19d \ \rightarrow\ 2$

સમીકરણ 2 માંથી સમીકરણ 1 બાદ કરતાં

$\therefore\ (a + 19d) - (a + 9d) = \frac{1}{10} - \frac{1}{20}$

$\therefore\ 10d = \frac{1}{20}$

$\therefore\ d = \frac{1}{200} \qquad \therefore\ a = \frac{1}{200}$

હવે, $T_{200} = a + (200 - 1)d$

$= \frac{1}{200} + \frac{199}{200}$

$= \frac{200}{200}$

$= 1$

9. એક વ્યક્તિ તેની લોનની ચૂકવણી માટે પ્રથમ હપ્તામાં રૂ. 200 ભરે છે. જો તે દર માસે હપ્તાની રકમમાં રૂ. 20 વધારે, તો 20 માં હપ્તાના અંતે તેણે કુલ કેટલી રકમ ભરપાઈ કરી હશે ?

અહીં, 200, 220, 240, ..., t_{20} શ્રેણી તૈયાર થાય.

$\therefore\ S_{20} = \frac{20}{2}\ [2(200) + (20 - 1) \times 20]$

$= 10\ [400 + 19 \times 20]$

$= 10\ [400 + 380]$

$\boxed{S_{20} = 7800}$ રૂ. 20 માં હપ્તે ચૂકવ્યા હશે.

- **સમગુણોતર શ્રેણી :**

જો શ્રેણી $F : N \rightarrow R, F(n) = Ar^n, A \in R - \{0\}, r \in R - \{0\}$ ને સમગુણોતર શ્રેણી કહે છે.

$n = 1, 2, 3, ...$ લેતાં સ્પષ્ટ થશે કે સમગુણોત્તર શ્રેણી $Ar^1, Ar^2, Ar^3, ...$ છે.

- અહીં r ને <u>સામાન્ય ગુણોત્તર</u> કહે છે. આ ગુણોત્તર શૂન્યેતર અચળ હોય છે.

- જો કોઇ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં પ્રથમ પદ a તથા સામાન્ય ગુણોત્તર r હોય તો, તો n માં પદનું સૂત્ર $\boxed{t_n = ar^{n-1}}$ થાય.

● **સમગુણોત્તર શ્રેઢી :**
સમગુણોત્તર શ્રેણીને સંબંધિત શ્રેઢીને 'સમગુણોત્તર શ્રેણી' કહેવાય.
સમગુણોત્તર શ્રેણી $a, ar, ar^2, ... ar^{n-1}$ ને સંબંધિત સમગુણોત્તર શ્રેઢી $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$ થાય.
આ શ્રેઢીના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો S_n હોય તો,

$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$

$\therefore \boxed{S_n = na \text{ (જો } r = 1)} \rightarrow 1$

$\therefore \boxed{Sn = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1} \text{ (જો } r > 1)} \rightarrow 2$

$\therefore \boxed{Sn = \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r} \text{ (જો } r < 1)} \rightarrow 3$

સમગુણોત્તર શ્રેણી અને સમગુણોત્તર શ્રેઢી આધારિત ઉદાહરણ જોઇએ.

1. જો સમગુણોત્તર શ્રેણીના n માં પદનું સૂત્ર $tn = \frac{n - (-1)^n}{2}$ હોય તો શ્રેણીના પ્રથમ પાંચ પદ મેળવો.

અહીં, $t_1 = \frac{1 - (-1)^1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$

$t_2 = \frac{2 - (-1)^2}{2} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$

$t_3 = \frac{3 - (-1)^3}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2$

$t_4 = \frac{4 - (-1)^4}{2} = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2}$

$t_5 = \frac{5 - (-1)^5}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$

આમ, શ્રેણીનાં માગેલા પ્રથમ પાંચ પદો $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}, 3$ છે.

2. $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, ...$નું 12 મું પદ શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ $a = \frac{1}{8}$

સામાન્ય ગુણોત્તર $R = \frac{1/4}{1/8} = 2$ & $n = 12$ છે.

$t_n = ar^{n-1}$

$\therefore t_{12} = \frac{1}{8}(2)^{12-1}$

$= \frac{1}{8} \times 2^{11} = \frac{2048}{8} = 256$

3. $7, \frac{-7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{-7}{8}, ...$નું 11મું પદ શોધો.

અહીં, સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ $a = 7$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{-7/2}{7} = \frac{-1}{2}$ અને $n = 11$ છે.

હવે, સમગુણોત્તર શ્રેણીના સૂત્ર અનુસાર,

$t_n = ar^{n-1}$

$\therefore t_{11} = 7\left(\frac{-1}{2}\right)^{11-1}$

$= 7\left(\frac{-1}{2}\right)^{10}$

$= \frac{7}{1024}$

4. $-2, -2\sqrt{2}, -4, -4\sqrt{2}, ...$નું 8 મું પદ શોધો.

અહીં, $a = -2 \quad r = \frac{-2\sqrt{2}}{-2} = \sqrt{2}$ & $n = 8$

$\therefore t_8 = (-2)\,(\sqrt{2})^{8-1}$

$= -2\,(\sqrt{2})^7$

$= -2 \times 8\sqrt{2}$

$= -16\sqrt{2}$

5. $t_7 = 96, r = 2$, તો t_{10} શોધો.

$96 = a(2)^{7-1}$

$\therefore 96 = a(2)^6$

$\therefore a = \frac{96}{64}$

$\therefore t_{10} = \frac{96}{64}\,(2)^{10-1}$

$= \frac{96}{64}\,(2)^9$

$= \frac{96 \times 512}{64} = 768$

$\therefore \boxed{t_{10} = 768}$

6. $a = 2, r = \sqrt{2}, t_n = 128$, તો n શોધો.

$t_n = ar^{n-1} = 128$

$\therefore 2(\sqrt{2})^{n-1} = 128$

$\therefore (\sqrt{2})^{n-1} = 64$

$\therefore 2^{\frac{n-1}{2}} = 2^6$

$\therefore \frac{n-1}{2} = 6$

$\therefore n - 1 = 12$

$\therefore \boxed{n = 13}$

7. $a = 3, r = 3, S_n = 363$, તો n શોધો.

અહીં, $r = 3 > 1$

$\therefore S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

$\therefore 363 = \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1}$

$\therefore 363 \times 2 = 3(3^n - 1)$

$\therefore 3^n - 1 = \frac{363 \times 2}{3} = 121 \times 2 = 242$

$\therefore 3^n = 243 = 3^5$

$\therefore \boxed{n = 5}$

8. $r = \frac{1}{3}, S_3 = \frac{585}{4}$ તો a શોધો.

અહીં, $r = \frac{1}{3} < 1$

$\therefore Sn = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

$$\therefore \frac{585}{4} = \frac{a\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3\right]}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$\therefore \frac{585}{4} = \frac{a\left(1 - \frac{1}{27}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{a\left(\frac{26}{27}\right)}{\frac{2}{3}} = a\left(\frac{26 \times 3}{2 \times 27}\right)$$

$\therefore a = \frac{585}{4} \times \frac{9}{13}$

$\therefore \boxed{a = \frac{405}{4}}$

9. જો સમગુણોત્તર શ્રેણીના પ્રથમ બે પદોનો સરવાળો $\frac{9}{2}$ અને છઠ્ઠું પદ એ તેનાં ત્રીજા પદથી 8 ગણું હોય, તો તે શ્રેણી શોધો.

ધારો કે સમગુણોત્તર શ્રેણીના પદો $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5$, ... છે.

$\therefore a + ar = \frac{9}{2}$ આપેલ છે. $\rightarrow$ (1)

વળી, છઠ્ઠું પદ $(ar^5) = 8 \times$ ત્રીજુંપદ (ar^2)

$\therefore ar^5 = 8 \times ar^2$

$\therefore r^5 = 8r^2$

$\therefore r^3 = 8$

$\therefore \boxed{r = 2}$

જે સમી - 1માં મૂકતા $a + a(2) = \frac{9}{2}$

$\therefore 3a = \frac{9}{2}$

$\therefore a = \frac{9}{2 \times 3} = \frac{3}{2}$

$\therefore$ માગેલ સમગુણોત્તર શ્રેણી,

$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}(2), \frac{3}{2}(2)^2, \frac{3}{2}(2)^3, \frac{3}{2}(2)^4, \frac{3}{2}(2)^5$ ......

$\therefore \frac{3}{2}, 3, 6, 12, 24,$ .... સમગુણોત્તર શ્રેણી થાય.